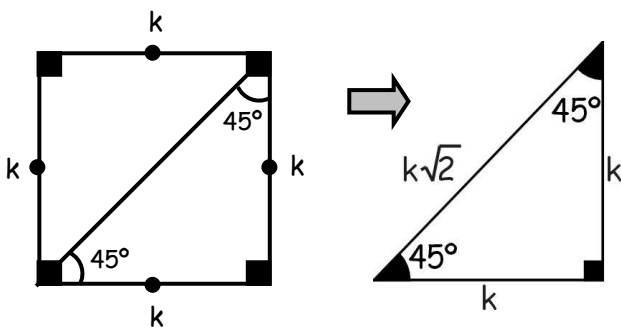


RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

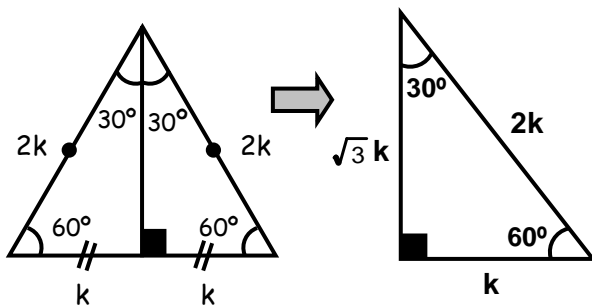
Son aquellos triángulos rectángulos donde conociendo las medidas de sus ángulos agudos, se puede saber la proporción existente entre sus lados.

Como por ejemplo:

1. Triángulo Notable de 45°

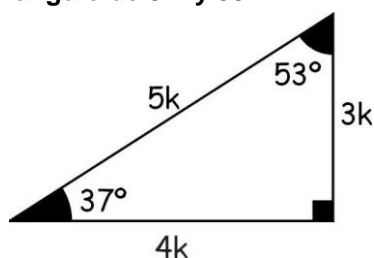


2. Triángulo Notable de 30° y 60°

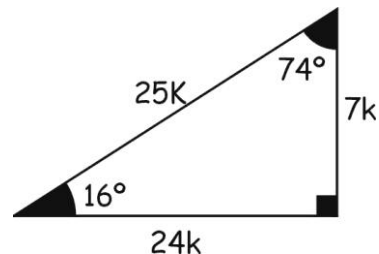


3. Triángulo Notables Aproximados

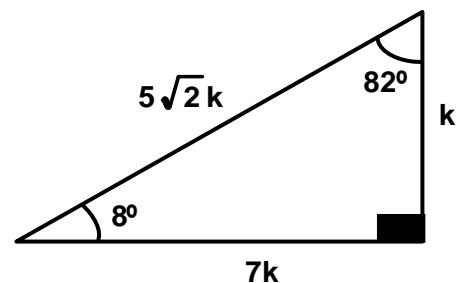
a) Triángulo de 37° y 53°



b) Triángulo de 16° y 74°



c) Triángulo de 8° y 82°



Ejercicios Resueltos

1. Calcular: $E = \text{Sen}^2 30^\circ + \text{Tg} 37^\circ$

Solución:

Reemplazando valores:

$$E = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow E = 1$$

2. Evaluar: $E = \frac{\text{sen}^2 45^\circ + \text{cos} 60^\circ}{\text{csc} 30^\circ}$

Solución:

Reemplazando:

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}{\frac{2}{1}} \Rightarrow \frac{\frac{2}{4} + \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \therefore E = \frac{1}{2}$$

Práctica dirigida N° 01

01. Calcular: $E = (\text{sen}30^\circ + \text{cos}60^\circ)\text{tg}37^\circ$
- a) 1 b) 2 c) 1/4
 d) 3/4 e) 4/3

02. Calcular
- $$F = \frac{4 \cdot \text{sen}30^\circ + \sqrt{3} \cdot \text{tg}60^\circ}{10 \cdot \text{cos}37^\circ + \sqrt{2} \cdot \text{sec}45^\circ}$$
- a) 1 b) 1/2 c) -1/3
 d) 2 e) 2/3

03. Calcular:
- $$E = \sqrt{6}\text{tg}30^\circ \text{sec}45^\circ + 3\text{sec}53^\circ$$
- a) 3 b) 5 c) 7
 d) 9 e) 11

04. Calcular: $E = \text{sec}37^\circ + \text{ctg}53^\circ - 2\text{sen}30^\circ$
- a) 0 b) 1 c) 2
 d) 3 e) 4

05. Resolver:
- $$5x\text{sen}53^\circ - 2\text{sec}60^\circ = x\text{tg}45^\circ + \text{sec}^245^\circ$$
- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 1/2 e) 1/4

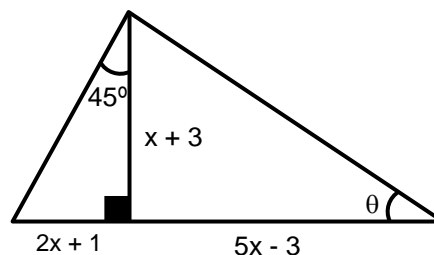
06. Indicar el valor de "x" en:
- $$\text{tg}(2x - 5^\circ) = \text{sen}^230^\circ + \text{sen}^260^\circ$$
- a) 15° b) 20° c) 25°
 d) 30° e) 35°

07. Determine el valor de "m" para que "x" sea 30°.
- $$\text{cos}2x = \frac{m-1}{m+1}$$
- a) 2 b) 3 c) 4
 d) 5 e) 6

08. Sea: $F(\theta) = \frac{\text{Sen}3\theta \cdot \text{Cos}6\theta \cdot \text{Csc}\left(\frac{9\theta}{2}\right)}{\text{Tg}3\theta \cdot \text{Sec}6\theta \cdot \text{Cot}\left(\frac{9\theta}{2}\right)}$
- Para evaluar: $\theta = 10^\circ$
- a) $\sqrt{13}$ b) $\sqrt{6}/8$ c) 15
 d) $\sqrt{15}/7$ e) 17

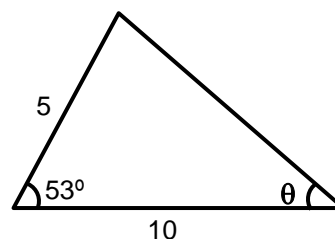
09. Del gráfico hallar: $\text{ctg}\theta$

- a) 1,6
 b) 1,7
 c) 0,4
 d) 0,6
 e) 1,4



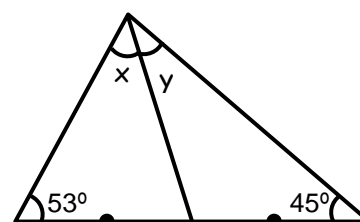
10. Del gráfico, hallar $\text{Ctg}\theta$

- a) $\frac{4}{5}$
 b) $\frac{7}{4}$
 c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$
 d) $\frac{7}{5}$
 e) 1



11. Del gráfico calcular: $E = \frac{\text{sen}x}{\text{sen}y}$

- a) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$
 b) $\frac{4}{5}$
 c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$
 d) $4\sqrt{2}$
 e) 1



Tarea N° 01

1. Calcular:

$$E = (\sec^2 45^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ) \operatorname{ctg} 37^\circ - 2 \cos 60^\circ$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

2. Calcular: "x"

$$3x \sec 53^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ = \sec 60^\circ (\sec 45^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ)^{\csc 30^\circ}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

3. Calcular: $E = (\operatorname{tg} 60^\circ + \sec 30^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ)^{\sec 60^\circ}$

- a) 25/12 b) 25/24 c) 49/12
d) 49/24 e) 7/18

4. Calcular:

$$E = \frac{\operatorname{Tg} 30^\circ \cdot \operatorname{Sec} 60^\circ - \operatorname{Sen} 37^\circ \cdot \operatorname{Cos} 30^\circ}{\operatorname{Sen}^2 45^\circ}$$

- a) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ b) $\frac{11\sqrt{3}}{5}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$
d) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

5. Calcular:

$$\operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2}$$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2} + 1$ c) $\sqrt{2} - 1$
d) $1 - \sqrt{2}$ e) $\sqrt{2} + 2$

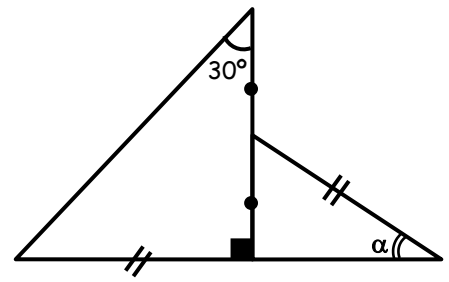
6. Hallar "x".

$$\text{Siendo: } \operatorname{Csc} x \cdot 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{Csc} 30^\circ}$$

- a) -1 b) -2 c) 1
d) 2 e) 3

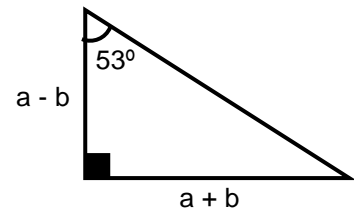
7. Determine $\operatorname{tg} \alpha$ en el gráfico.

- a) $\sqrt{3}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$



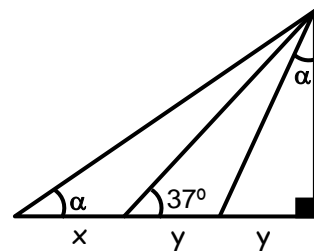
8. De la figura calcular a/b

- a) 1
b) 2
c) 5
d) 7
e) 8



9. Del gráfico hallar $\frac{y}{x}$

- a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 6



PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Razones Trigonométricas Recíprocas

Para un mismo ángulo, siempre se cumple:

$\text{Sen}\alpha \cdot \text{Csc}\alpha = 1$
$\text{Cos}\alpha \cdot \text{Sec}\alpha = 1$
$\text{Tg}\alpha \cdot \text{Ctg}\alpha = 1$

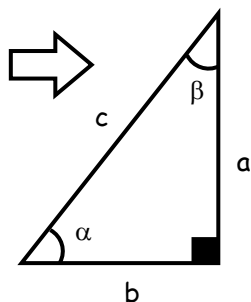
Ejemplos:

- ★ $\text{Sen } 10^\circ \cdot \text{Csc}10^\circ = 1$
- ★ $\text{Tg } A \cdot \text{Ctg } A = 1$
- ★ $\text{Cos}(x+y) \cdot \text{Sec}(x+y) = 1$
- ★ $\text{Csc}(x + y - z) \cdot \text{Sen}(x + y - z) = 1$

2. Razones trigonométricas de Ángulos Complementarios

Si: α y β son dos ángulos complementarios, siempre se cumple que:

$\text{sen}\alpha = \text{cos}\beta$
$\text{tg}\alpha = \text{ctg}\beta$
$\text{sec}\alpha = \text{csc}\beta$



Es decir: $\alpha + \beta = 90^\circ$

Ejemplos:

- ★ $\text{Sen}20^\circ = \text{Cos } 70^\circ$
- ★ $\text{Tg } 50^\circ = \text{Ctg } 40^\circ$
- ★ $\text{Sec } 80^\circ = \text{Csc}10^\circ$

Ejercicios Resueltos

1. Resolver el menor valor positivo de "x" verifique:

$$\text{Sen}5x = \text{Cos}x$$

Solución:

Dada la ecuación: $\text{Sen}5x = \text{Cos}x$

Luego los ángulos deben sumar 90° , entonces:

$$5x + x = 90^\circ$$

$$6x = 90^\circ$$

$$\boxed{x = 15^\circ}$$

2. Resolver "x" el menor positivo que verifique:

$$\text{Sen}3x - \text{Cos}y = 0$$

$$\text{Tg } 2y \cdot \text{Ctg}30^\circ - 1 = 0$$

Solución:

Nótese que el sistema planteado es equivalente a:

$$\star \text{ Sen}3x = \text{Cos}y \Rightarrow 3x + y = 90^\circ \text{ (R.T. complementarios)}$$

$$\star \text{ Tg}2y \cdot \text{Ctg}30^\circ = 1 \Rightarrow 2y = 30^\circ \text{ (R.T. recíprocas)}$$

$$\boxed{y = 15^\circ}$$

Reemplazando en la primera igualdad:

$$3x + 15^\circ = 90^\circ$$

$$3x = 75^\circ$$

$$\boxed{x = 25^\circ}$$

3. Si: $\text{Sen } 9x - \text{Cos } 4x = 0$,

$$\text{calcular: } P = \frac{\text{Tg}7x}{\text{Ctg}6x}$$

Solución:

Del Dato: $\text{Sen } 9x = \text{Cos } 4x$

$$9x + 4x = 90^\circ$$

$$\boxed{13x = 90^\circ}$$

Pero: $7x + 6x = 13x$
 $7x + 6x = 90^\circ$

Entonces: R.T.(7x) = Co-R.T.(6x)

Luego: $\frac{Tg7x}{Ctg6x} = 1$

$\therefore P = 1$

Práctica Dirigida N° 02

1. Poner V o F según convenga:

- a) $\text{sen}20^\circ = \text{cos}70^\circ$ ()
 b) $\text{tg}10^\circ \cdot \text{ctg}10^\circ = 1$ ()
 c) $\text{sec}(x + 40^\circ) = \text{csc}(50^\circ - x)$ ()
 d) $\text{tg}(x + y) \cdot \text{ctg}(x + y) = 1$ ()
 e) $\text{tg}20^\circ = \text{ctg}20^\circ$ ()

2. Señale el valor de "x"

Si: $\text{Sen}2x \cdot \text{Csc}40^\circ = 1$

- a) 10° b) 5° c) 15°
 d) 20° e) 40°

3. Sabiendo que: $\text{Tg}5x \cdot \text{Ctg}(x + 40^\circ) = 1$
 Calcular: $\text{Cos}3x$

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{2}{3}$

4. Hallar "x"

Si: $\text{Cos}(3x - 12^\circ) \cdot \text{Sec}(x + 36^\circ) = 1$

- a) 12° b) 24° c) 36°
 d) 48° e) 8°

5. Determine "x" en:

$\text{Sen}(3x + 25^\circ) \cdot \text{Csc}(x + 35^\circ) = 1$

- a) 5° b) 8° c) 10°
 d) 15° e) 20°

6. Calcular:

$E = (7\text{tg}10^\circ - 2\text{ctg}80^\circ)(\text{ctg}10^\circ + \text{tg}80^\circ)$

- a) 5 b) 14 c) 10
 d) 12 e) 8

7. Calcular: $E = \frac{\text{sen}10^\circ}{\text{cos}80^\circ} + \frac{2\text{tg}20^\circ}{\text{ctg}70^\circ} - \frac{3\text{sec}40^\circ}{\text{csc}50^\circ}$

- a) 1 b) 2 c) 0
 d) -1 e) -2

8. Si: $\text{Sec}7x = \text{Csc}4x$

Calcular: $E = \frac{2\text{Sen}x}{\text{Cos}10x} - \frac{\text{Tg}3x}{\text{Ctg}8x}$

- a) 0 b) 1 c) 2
 d) -1 e) -2

9. Calcular: $\text{cos}(x + y)$

Si: $\text{Sen}(x - 5^\circ) \cdot \text{Csc}(25^\circ - x) = 1$

$\text{Sen}(y + 10^\circ) = \text{Cos}(y + 20^\circ)$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$
 d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. Simplificar:

$E = \frac{\text{Tg}10^\circ + \text{Tg}20^\circ + \text{Tg}30^\circ + \dots + \text{Tg}80^\circ}{\text{Ctg}10^\circ + \text{Ctg}20^\circ + \text{Ctg}30^\circ + \dots + \text{Ctg}80^\circ}$

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$
 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. Determine "x" :

$\text{sec}(2x - 8) = \text{sen}40^\circ \text{csc}40^\circ + \frac{\text{tg}15^\circ}{\text{ctg}75^\circ}$

- a) 17° b) 20° c) 28°
 d) 30° e) 34°

Tarea N° 02

1. Señale el valor de "x"
Si: $\text{Sen}3x \cdot \text{Csc}54^\circ = 1$

a) 10° b) 12° c) 14°
d) 16° e) 18°

2. Sabiendo que: $\text{Tg}3x \cdot \text{Ctg}(x + 40^\circ) = 1$
Calcular: $\cos3x$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{4}{5}$

3. Señale el valor de "x"
Si: $\text{Cos}(2x - 10^\circ) \cdot \text{Sec}(x + 30^\circ) = 1$

a) 10° b) 20° c) 30°
d) 40° e) 50°

4. Si: $\text{Sen}(3x - 10^\circ) \cdot \text{Csc}(x + 10^\circ) = 1$
Calcular:

$$E = \text{Sec}6x \cdot \text{Tg}8x \cdot \text{Tgx}$$

a) 1 b) 2 c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5. Calcular:

$$E = (4\text{Sen}2^\circ + 3\text{Cos}88^\circ) \text{Csc}2^\circ$$

a) 14 b) 13 c) 11
d) 9 e) 7

6. Simplificar:

$$E = \frac{2\text{sen}10^\circ}{\text{cos}80^\circ} + \frac{3\text{tg}30^\circ}{\text{ctg}60^\circ} + \frac{5\text{sec}20^\circ}{\text{csc}70^\circ}$$

a) 4 b) 6 c) 8
d) 10 e) 12

7. Si: $\text{Sen}3x = \text{Cos}14x$
Calcular:

$$E = \text{tg}5x \text{tg}12x + \frac{2\text{sec}x}{\text{csc}16x}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

8. Si: $\text{Sec}(4x - 10^\circ) = \text{Csc}(40^\circ - x)$

$$\text{Calcular: } E = \text{tg}^2 3x + \text{csc} \frac{3x}{2}$$

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

9. Determine el valor de "x" en :

$$\text{Tg}(x - 10^\circ) = \text{Tg}1^\circ \text{Tg}2^\circ \text{Tg}3^\circ \dots \text{Tg}89^\circ$$

a) 30° b) 45° c) 55°
d) 65° e) 75°

10. Si: $\text{sen}(x - 20^\circ) = \text{cos}(y - 30^\circ)$

Calcular:

$$\frac{\text{Sen}\left(\frac{x+y}{4}\right) + \text{Cos}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\text{Cos}(x+y-85^\circ) + \text{Sen}(x+y-120^\circ)}$$

a) $1/2$ b) 2 c) -1
d) 0 e) 1

11. Calcular :

$$E = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{5} + x\right)}{\text{cos}\left(\frac{3\pi}{10} - x\right)} + \frac{\text{tg}\left(\frac{3\pi}{8} - x\right)}{\text{ctg}\left(\frac{\pi}{8} + x\right)}$$

a) 2 b) 3 c) 1
d) 0 e) $1/2$